

Electromagnétisme, Equations de Maxwell

Pour commencer, un bref rappel des équations de Maxwell et des grandeurs et constantes mises en jeu. Les équations de Maxwell sont au nombre de quatre et sont les suivantes :

$$\text{Maxwell-Flux : } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell-Gauss : } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Maxwell-Faraday : } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère : } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Où \vec{E} est le champ électrique, \vec{B} est le champ magnétique, \vec{j} le vecteur densité de courant, ρ la densité de charge volumique. Ces quatre grandeurs sont définies en un point M et à un instant t.

On a aussi deux constantes, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide.

Bon, tout ceci n'a aucun sens comme ça, bien sûr. Il faut d'abord voir ce qu'est qu'un champ, ensuite ce que sont les champs électriques et magnétiques, avec leur rapport avec le courant et les charges électriques. Et enfin, peut-être qu'on aura une certaine signification de ces équations.

Les champs

Il s'agit tout d'abord de bien comprendre ce qu'est qu'un champ. En physique (en maths je ne crois pas que cela soit tout à fait pareil, il y a une définition plus formelle que je ne connais pas et qui n'est sûrement pas intéressante) c'est une *propriété de l'espace* due à l'interactions entre des sources de ce champ et le reste des objets de l'espace. En fait, comprendre ce qu'est un champ demande de changer un peu de point de vue par rapport à ce que l'on considère comme une force habituellement. Prenons l'exemple de la force de gravitation. Il est bien connu que la force de gravitation qu'exerce une masse M située en un point O sur une masse m située en un point P a pour expression, merci Newton :

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{OP^3} \vec{OP} \quad \text{où } G \text{ est la constante gravitationnelle.}$$

Bon. Ca, c'est la physique des forces, qui est utile lorsque l'on veut étudier l'interaction réciproque entre deux masses, par exemple. Mais, intéressons-nous plutôt à l'interaction d'une masse avec toutes les autres : considérons une masse M située en un point O . Alors, en tout point P de l'espace, si l'on place une masse m , cette masse subira une force égale à celle ci-dessus. On peut donc dire qu'en tout point de l'espace, la masse M crée, disons, une « force potentielle » qui s'exercerait s'il y avait une masse en ce point. Hé bien, le champ gravitationnel de la masse M , c'est ça. Ca ne correspond

à rien de physique, c'est juste une propriété de l'espace qui existe en tout point et qui est induite par la présence de la masse M . Ici, on a en fait un champ vectoriel : notons $\vec{g}(P) = -G \frac{M}{OP^3} \vec{OP}$, alors toute masse m située à en un point P subira une force $\vec{F} = m \vec{g}(P)$. Cette fonction \vec{g} , c'est le champ gravitationnel de la masse M située en O . Et c'est là que vient tout l'intérêt de considérer la force de gravitation comme un champ de force : \vec{g} ne dépend pas de m , mais que du point P ! Ainsi, dès que l'on connaît la fonction \vec{g} en tout point de l'espace, on connaît facilement la valeur de la force de gravitation causée par la masse M en tout point de l'espace, si l'on y plaçait une masse m .

On peut noter au passage que cela rappelle l'expression habituelle du poids $\vec{p} = m \vec{g}$ bien connue. Hé bien, dans l'expression du poids, \vec{g} est effectivement un champ de force - que l'on considère en général constant parce qu'il ne change pas beaucoup avec l'altitude ; en revanche, il prend plus de choses en compte que juste la force de gravitation (on y ajoute les forces dues à la rotation de la Terre).

Voilà ce qu'est qu'un champ : une propriété de l'espace existant en tout point qui reflète les interactions que peut produire un objet, la source du champ. Il peut exister des champs scalaires - en tout point de l'espace, on définit un scalaire, c'est à dire un nombre -, des champs vectoriels - en tout point de l'espace, on définit un vecteur -, des champs matriciels - en tout point de l'espace, on définit une matrice - etc. Ce sont uniquement les deux premiers types de champs qui nous intéressent en électromagnétisme, les scalaires et les vectoriels.



Chant de scalaires

En électromagnétisme, on considère l'existence de deux champs : le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} . Le premier est créé par les charges électriques (en général, ce sont des ions, des électrons ou des noyaux d'atomes) ; on note ρ la densité volumique de charge, c'est à dire la quantité de charge par unité de volume, en gros. Elle est nulle là où il n'y a pas de charges, et non nulle là où il y en a... et d'autant plus importante en un point que les charges sont concentrées en ce point. Le champ magnétique, lui, est créé par les courants électriques, c'est à dire le déplacement des charges. On note \vec{j} le vecteur densité de courant électrique, qui reflète le déplacement de ces charges : il a le sens de la vitesse des charges et est proportionnel à cette vitesse et à la quantité de charges qui se déplace. Donc, plus il y a de charges et plus elles se déplacent vite, et plus ce vecteur est important ; s'il n'y a pas de charges mobiles, il est évidemment nul. Par exemple, dans un matériaux conducteur, s'il y a du courant qui passe, \vec{j} sera défini et non nul ; à l'inverse, dans un isolant, il n'y a pas de charges mobiles, donc \vec{j} y est forcément toujours nul.

Ces deux champs prennent tout leur sens lorsque l'on considère la force qu'ils créent sur une particule de charge q , appelée force de Lorentz :

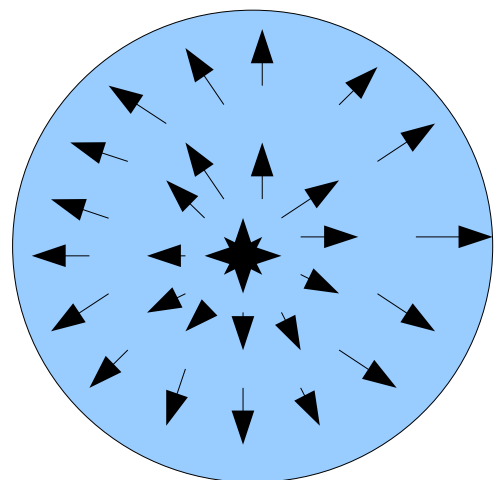
$\vec{f} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$ où \vec{v} est la vitesse de la particule en question, et \vec{E} et \vec{B} la valeur des champs électriques et magnétiques au point de l'espace où est située la particule. On peut déjà apercevoir toutes les difficultés qui entourent les champs électriques et magnétiques : une particule chargée plongée dans un champ électromagnétique (*id est*, la superposition d'un champ magnétique et d'un champ électrique) va tout d'abord causer elle-même un champ électrique (à cause de sa charge), mais va par ailleurs se déplacer sous l'effet de la force de Lorentz, donc avoir

une vitesse, donc créer un courant électrique, donc causer un champ magnétique. La particule est donc à la fois source, et à la fois « cible » du champ électromagnétique ; et si l'on met plusieurs particules chargées, voire des objets plus complexes, on a tout un bazar qui apparaît et un couplage du champ électrique et du champ magnétique très subtil qui se met en place : supposons que deux objets chargés soient seuls dans un espace ; alors les deux créent un champ électrique comme ils sont chargés, donc les deux vont bouger à cause du champ de l'autre et de la force de Lorentz qui en résulte, donc les deux vont créer un champ magnétique, donc les deux vont bouger différemment parce que la force de Lorentz se modifie à cause du champ magnétique, etc. Sachant que lorsqu'ils bougent, ils modifient aussi le champ électrique qu'ils créent. D'où l'intérêt d'avoir des équations qui lient champ magnétique et champ électrique, puisqu'il apparaît qu'ils sont extrêmement liés l'un et l'autre - en fait, en pratique, on ne considère jamais l'existence de l'un sans l'autre : un champ magnétique induit un champ électrique, et inversement. On pourrait dire qu'ils ne sont que l'expression, à eux deux, d'un seul champ, le champ électromagnétique.

Les opérateurs de champ

Un champ, on peut donc voir ça comme une fonction définie en tout point de l'espace. On définit plusieurs opérateurs sur les champs, qui traduisent toutes certaines propriétés des champs, et qui ont cette fois une certaine signification physique. Un opérateur, c'est une fonction qui prend un champ et lui fait correspondre un autre champ, d'une autre nature ou non, donc qui lui-même aura une certaine valeur en tout point de l'espace, et c'est cette valeur qui reflètera les propriétés du champ au voisinage du point.

Considérons un champ \vec{A} . La divergence de ce champ, noté $\text{div}\vec{A}$, est un scalaire qui représente la propension qu'a ce champ à partir dans des directions différentes. Sans essayer pour l'instant de la définir plus précisément, essayons de voir ce qu'elle représente par des exemples : considérons un champ de vecteurs qui partent tous d'un point source S : alors, la divergence de ce champ en S ne sera pas nulle. Considérons un champ qui, au contraire, est uniformément dirigé dans une seule direction au voisinage d'un point : la divergence de ce champ en ce point sera nulle. En fait, la divergence d'un champ en un point montre la tendance qu'a ce champ à sembler partir de ce point. Par exemple, prenons une fontaine d'eau, pas compliquée, circulaire, avec juste de l'eau qui sort du milieu et qui s'écoule vers les côtés (voir ci-contre, c'est artisanal mais c'est à peu près ça). On peut considérer le courant de l'eau comme un champ de vecteurs : en tout point, le champ a la direction de l'écoulement de l'eau et est d'autant plus fort que l'eau s'écoule vite. Alors, au milieu, là où l'eau sort, la divergence de ce champ sera plutôt importante. En revanche, sur les côtés, là où l'eau ne fait que s'écouler à peu près dans une seule direction avec une vitesse à peu près constante, elle sera proche de zéro. Pour finir, plus précisément, avec A_x , A_y et A_z les composantes de \vec{A} selon



La fontaine d'exemple

les coordonnées x , y et z (en coordonnées cartésiennes), on définit la divergence de \vec{A} par $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

Le rotationnel a une signification un peu moins facile à saisir. On le note $\vec{\operatorname{rot}} \vec{A}$, c'est un vecteur et pas un scalaire, et il traduit la propension qu'a le champ \vec{A} à tourner, à faire des boucles. Reprenons l'exemple de la fontaine avec le champ du courant de l'eau : son rotationnel est *a priori* partout nul. En effet, l'eau s'écoule localement dans une seule direction (du centre de la fontaine vers les côtés), elle ne tourne pas... En revanche, prenons l'exemple d'une tornade en considérant le champ que forme la force et la direction dans laquelle souffle le vent : son rotationnel ne sera pas nul, parce qu'effectivement, ce champ a une tendance à s'enrouler autour de l'oeil de la tornade. Plus précisément, on définit le rotationnel de \vec{A} en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{où } A_x, A_y \text{ et } A_z \text{ sont les composantes de } \vec{A} \text{ selon } x, y \text{ et } z, \text{ mais cette définition, si elle est très logique quand on y repense, n'est pas très intuitive (moins que celle de la divergence).}$$

La dérivation temporelle

Il nous manque un petit outil pour comprendre les équations de Maxwell : la dérivation d'un champ, par rapport au temps. Vous savez déjà ce qu'est qu'une dérivée : c'est ce qui représente la variation d'une fonction. Plus une fonction varie en un point et plus sa dérivée en ce point sera importante. On s'intéressera nous ici aux variations des champs par rapport au temps : avec \vec{A} un champ, on note $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ la variation de ce champ par rapport au temps. Ainsi, si en un point, le champ \vec{A} varie beaucoup, cette grandeur sera importante ; à l'inverse, si le champ reste constant, elle sera nulle.

Les équations proprement dites

Maintenant, on peut essayer de comprendre ce que signifient ces équations. Un petit rappel, \vec{E} est le champ électrique, \vec{B} le champ magnétique, ρ la densité volumique de charge, et \vec{j} le vecteur densité de courant. ϵ_0 et μ_0 sont deux constantes dont on ne s'occupera pas (elles n'ont pas d'importance physique énorme).

Considérons la première, celle dite de **Maxwell-Flux** :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Autrement dit, en tout point, la divergence de \vec{B} est nulle. Relisez le paragraphe sur la divergence et faites la conclusion qui s'impose : \vec{B} n'a pas de sources ! Pourtant, on avait dit qu'un champ est créé par des sources, et pour \vec{B} c'est le courant électrique, autrement dit \vec{j} ... Non, plus précisément, il faut comprendre que \vec{B} ne provient pas de sources. En fait, \vec{B} est un champ assez particulier qui ne vient pas d'un endroit et ne se dirige pas vers un autre (par comme le courant de l'eau, par exemple) : il s'enroule autour des courants électriques. Il forme des boucles autour des courants (donc est bien créé par \vec{j}), mais n'est pas dirigé de ces courants vers le reste de l'espace ; on le retrouvera dans une autre équation. Intégrons maintenant cette équation dans un volume V délimité par une surface fermée Σ : par la formule de Green-Ostrogradski, on a $\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} d\tau = \oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$, autrement dit le flux de \vec{B} à travers toute surface fermée Σ est nul. Autrement dit, quelle que soit la surface fermée que l'on considère, elle est nécessairement traversée par autant de « quantité » de \vec{B} dans un sens que dans un autre - il y a autant de champ magnétique qui pénètre à l'intérieur du volume délimité par la surface que de champ magnétique qui en sort.

Intéressons-nous à l'autre équation qui concerne directement le champ magnétique, celle dite de **Maxwell-Ampère** :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Un peu compliqué comme expression, mais débroussaillons un peu. Supposons d'abord que le champ électrique soit stationnaire, c'est à dire indépendant du temps (il reste toujours le même partout), autrement dit que les charges électriques ne bougent pas, ou alors de façon uniforme (c'est le cas si, par exemple, il y a juste un courant constant qui parcourt un fil électrique...) : alors, la variation de \vec{E} par rapport au temps est nulle, autrement dit $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$. Cela simplifie donc l'équation, tout d'un coup :

on arrive à $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Rappelez-vous que μ_0 n'a pas de signification physique, donc oubliez-la : vous voyez que le rotationnel de \vec{B} est proportionnel au courant électrique \vec{j} . C'est à dire exactement que \vec{B} fait des boucles autour des courants ! Considérons maintenant que \vec{E} varie en fonction du temps ; d'une part, cela veut dire qu'une variation du champ électrique crée un champ magnétique, et on retrouve ici l'expression du couplage entre les deux champs que l'on avait pressentie avant ; d'autre part, cela signifie qu'on peut en fait interpréter $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, i.e la variation du champ électrique,

comme un courant électrique, appelé *courant de déplacement* - même si, attention, c'est loin d'être un courant. On peut intégrer cette équation sur une surface ouverte Σ de contour γ , alors par la formule de Stokes, on a : $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}$, c'est à dire que la circulation de \vec{B} est proportionnelle à la somme du flux de \vec{j} et de la variation du flux de \vec{E} ... et là on s'aperçoit qu'en fait, ce charabia n'a plus aucune signification physique évidente. Oublions la formulation intégrale de cette équation.

Passons à une équation plus simple, celle dite de **Maxwell-Gauss** :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Elle traduit directement le fait que \vec{E} est créé par les charges électriques. Elle signifie que la divergence de \vec{E} en un point est proportionnel à la concentration de charges en ce point, c'est à dire que s'il y a des charges en un point, alors \vec{E} a tendance à partir de ce point pour aller vers le reste de l'espace. Ce qui signifie très exactement que \vec{E} part de ses sources (les charges) et se dirige vers là où il n'y a pas de charges. Intégrons cette équation dans un volume V délimité par une surface fermée Σ , toujours par la formule de Green-Ostrogradski, on a :

$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} d\tau = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ où Q_{int} est la charge totale contenue dans le volume V . Autrement dit, le flux de \vec{E} à travers une surface fermée est proportionnel à la charge totale contenue par cette surface, donc plus il y a de charges dans le volume que délimite la surface, plus il y a de champ magnétique qui sort de cette surface.

La dernière équation est dite de **Maxwell-Faraday** :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Essentiellement, elle signifie que la variation du champ magnétique crée un champ électrique : on retrouve ici le couplage entre les deux champs. On peut aussi voir que lorsque le champ magnétique ne varie pas dans le temps, c'est à dire lorsque le second membre est nul, alors le champ électrique n'a jamais tendance à s'enrouler : il reste, disons, à peu près « droit » - se propage radialement des charges vers le reste de l'espace. Intégrons pour voir, sur une surface ouverte Σ de contour γ , la formule de Stokes donne : $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS}$ c'est à dire que la circulation de \vec{E} est opposée à la variation du flux de \vec{B} . Encore une fois, ça ne veut plus dire grand chose physiquement.

Compléments

Les équations de Maxwell ont en définitive assez peu de signification, mais en les combinant un peu entre elles on peut leur trouver des conséquences déjà beaucoup plus intéressantes. Voyons deux exemples.

La conservation de la charge

On part de l'équation de Maxwell-Ampère dont on considère la divergence :

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = \operatorname{div} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Comme la divergence d'un rotationnel est nulle (faites le calcul, vous verrez), et comme μ_0 et ϵ_0 sont des constantes et comme on peut échanger la dérivation temporelle et la divergence, cela donne :

$$0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} \quad \text{et comme } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{par l'équation de Maxwell-Gauss,}$$

on a au final $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. C'est l'équation de conservation de la charge électrique, et ce nom se comprend très bien : elle signifie que là où le courant électrique diverge, les charges électriques disparaissent - et inversement, là où il converge, les charges augmentent. S'il ne diverge pas (c'est à dire qu'il reste constant), la charge ne varie pas. Mais cela, en fait, vous le saviez depuis toujours : reprenons l'analogie avec l'eau qui est très bonne (les équations de physique des fluides sont très similaires) : s'il n'y a que de l'eau qui arrive à un endroit et que rien n'en repart, l'eau s'y accumule - cela correspond exactement au cas où le courant est convergent en un point, donc sa divergence est négative, donc la variation des charges en fonction du temps est positive (oui, regardez l'équation), donc les charges augmentent en ce point. Vous voyez bien que cette équation traduit exactement la signification physique de l'accumulation ! D'ailleurs, on peut la retrouver en terme de circulation automobile, dans certains modèles. Inversement, si il y a autant d'eau qui arrive à un endroit que d'eau qui en repart, alors la quantité d'eau à cet endroit reste constante, il n'y a ni accumulation ni disparition - cela correspond exactement au cas où la divergence du courant est nulle, et alors l'équation dit que la densité de charges à cet endroit ne varie pas en fonction du temps. Bref, tout est logique.

La propagation d'une onde électromagnétique

On ne rentrera pas trop dans les détails, ils n'ont aucune utilité. Il est juste intéressant de remarquer que la lumière est une onde électromagnétique (tout comme les rayons ultraviolets, infrarouge, les rayons X, les ondes radio, et caetera), c'est à dire que c'est une variation du champ électromagnétique qui se propage dans l'espace. Donc les équations de Maxwell décrivent, entre autre, la propagation de la lumière, et y on retrouve tous les phénomènes lumineux connus en optique.

Plus précisément, on arrive à l'équation suivante (en calculant le rotationnel de l'équations de Maxwell-Faraday, si vous êtes curieux ; et en faisant l'hypothèse que ρ et \vec{j} sont nuls, une hypothèse qui se justifie par le fait que ces équations sont valables dans le vide (dans d'autres milieux, il faut changer ε_0 et μ_0) et que dans le vide, il n'y a ni courant ni charges), c'est une équation qui intervient quasi-systématiquement dans les phénomènes de propagation d'onde :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Cette équation est dite de d'Alembert ; sa résolution générale nous dit que le terme en $\varepsilon_0 \mu_0$ correspond à l'inverse du carré de la vitesse de propagation de l'onde. Et la vitesse de la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide, puisque l'on sait que la lumière est une onde électromagnétique... c'est tout simplement la vitesse de la lumière. Les équations de Maxwell donnent donc $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$; encore mieux, comme elles sont valables quel que soit le référentiel, elles permettent de prouver que la vitesse de la lumière *ne dépend pas du référentiel*, une des bases de la relativité. D'ailleurs, on peut arriver avec les équations de Maxwell à des contradictions avec la physique classique galiléenne, contradictions qui ne seront surmontées qu'avec les théories d'Einstein - c'est à dire 50 ans après Maxwell.